Développement : Décomposition polaire

Algèbre & Géométrie
Analyse & Probabilités

Références : [CAL] Caldero P., Germoni J., *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome premier*, Calvage et Mounet, 2013, p202.

Pour les leçons :
- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Le but de ce développement est de prouver un théorème de **décomposition polaire**, énoncé plus bas.

Lemme 1.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Si $A^2 = B^2$, alors les valeurs propres de A et de B sont les mêmes au signe près.

Preuve : Supposons que $A^2 = B^2$. Notons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$.
En trigonalisant A et en passant au carré, on voit que $\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_s^2\}$ (avec éventuelles répétitions).
Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$. Alors, de même, μ^2 est une valeur propre de $B^2 = A^2$. Il existe ainsi $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $\mu^2 = \lambda_i^2$, et donc $\mu = \pm\lambda_i$. Donc $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ ou $-\mu \in \mathrm{Sp}(A)$.
De même, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ ou $-\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$.
Cela prouve que A et B ont les mêmes valeurs propres au signe près. $\square$

Théorème 2. ***Décomposition polaire.***

La multiplication matricielle induit un homéomorphisme $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \varphi(O, S) = OS.$$

Preuve : Soit φ l'application définie dans l'énoncé du théorème. Soit $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
⋆ Étape 1 : Montrons que φ est bien définie et continue.
On a $\det(\varphi(O, S)) = \det(O)\det(S) \neq 0$, donc φ est bien définie.
En outre, φ est continue en tant que fonction polynomiale en les coefficients de O et de S.
⋆ Étape 2 : Montrons que φ est surjective.
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$^tX{}^tMMX \quad = \quad \|MX\|_2^2 \geqslant 0.$$

Si $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, l'inégalité est stricte, car dans le cas contraire, M aurait 0 comme valeur propre, et donc $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Par conséquent, ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i > 0$ tels que :

$${}^tMM = PD{}^tP.$$

Posons $S = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right) {}^tP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de sorte que $S^2 = {}^tMM$.
On pose également $O = MS^{-1}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} {}^tOO &= S^{-1}\,{}^tMMS^{-1} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Alors, $O \in O_n(\mathbb{R})$, et on a :

$$\begin{aligned} \varphi(O, S) &= OS \\ &= M, \end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est surjective.
⋆ Étape 3 : Montrons que φ est injective.

Soient $(O,S),(O',S')\in O_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :

$$M:=\varphi(O,S)=OS=O'S'=\varphi(O',S').$$

Alors,

$${}^tMM={}^tS{}^tOOS=S^2=S'^2.$$

Donc $S^2=S'^2$. Soit Q un polynôme interpolateur de LAGRANGE (de degré minimal, par exemple) défini par :

$$\forall i\in[\![1;n]\!]\quad Q(\lambda_i)=\sqrt{\lambda_i},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $S^2\left(=S'^2\right)$.
Alors, en notant $P\in O_n(\mathbb{R})$ donné par le théorème spectral appliqué à S :

$$\begin{aligned}S&=P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}\right){}^tP\\&=PQ(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)){}^tP\\&=Q(P\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n){}^tP)\\&=Q(S^2).\end{aligned}$$

Le lemme 2 montre que S et S' ont les mêmes valeurs propres au signe près. Comme elles sont dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ces valeurs propres sont positives, donc $\mathrm{Sp}(S)=\mathrm{Sp}(S')$. On peut donc appliquer le même raisonnement pour avoir $S'=Q\left(S'^2\right)$.
Comme $S^2=S'^2$, on a ainsi :

$$S=Q(S^2)=Q\left(S'^2\right)=S',$$

et donc $S=S'$. Par suite, $O=O'$.

Remarque 3.

Le livre fait une autre preuve de $S=S'$ (en passant par une diagonalisation simultanée) mais cet argument me paraît plus simple.

D'où l'injectivité.
Ainsi, φ est bijective.
⋆ ÉTAPE 4 : Montrons que φ^{-1} est continue.
Soit $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergente vers M. On écrit $M=OS$, où $(O,S)=\varphi^{-1}(M)$.
Pour $k\in\mathbb{N}$, on note :

$$(O_k,S_k)=\varphi^{-1}(M_k)\in O_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Montrons que $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge respectivement vers O et S.
Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence $\bar{O}$. Il existe donc une extractrice $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{k\to+\infty}O_{\psi(k)}=\bar{O}.$$

Alors, pour $k\in\mathbb{N}$:

$$S_{\psi(k)}=(O_{\psi(k)})^{-1}M_{\psi(k)}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\bar{O}^{-1}M=:\bar{S},$$

par continuité de la fonction $A\longmapsto A^{-1}$ (ou, au choix, de la transposée, puisque les $O_{\psi(k)}\in O_n(\mathbb{R})$).
Maintenant :

$$\begin{aligned}\bar{S}&=\bar{O}^{-1}M\\&\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\cap\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}\\&\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\\&\in S_n^{++}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Donc $M=\varphi(O,S)=\varphi(\bar{O},\bar{S})$. Comme φ est bijective, $O=\bar{O}$ et $S=\bar{S}$.
On a montré que toute valeur d'adhérence de la suite $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à O, et c'est une suite d'un espace compact.
Donc $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{k\to+\infty}O_k=O$, et comme $\lim\limits_{k\to+\infty}M_k=M$, on a que $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{k\to+\infty}S_k=S$.
En conclusion, pour toute $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $\varphi^{-1}(M_k)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi^{-1}(M)$.
Donc φ^{-1} est continue, ce qui achève la preuve. □

Remarque 4. ***Polynôme interpolateur de*** **LAGRANGE.**

Soient $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{C}$ **deux à deux distincts**, et $b_1,\dots,b_r\in\mathbb{C}$ (pas forcément deux à deux distincts). Le polynôme interpolateur de LAGRANGE associé à ces nombres est l'unique polynôme Q de degré $<r$ défini par :

$$Q(X)=\sum_{i=1}^{r}b_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\ j\neq i}}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}.$$